Nova Série
BOLETIM
DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Bol. Soc. Bras. Mat., Vol. 26, N. 2, 129-148

Sur les surfaces de Weingarten spéciales de type minimal

Ricardo Sa Earp et Eric Toubiana

Abstract. We derive a classification of special Weingarten rotation surfaces of minimal type in Euclidean space. We prove existence and uniqueness, and we give a necessary and sufficient condition to have a complete surface. Futhermore, we prove that under some further simple condition there is a 1- parameter family of complete special surfaces with the same geometrical behaviour as the minimal catenoids family. We remark that there is in our context of special Weingarten minimal type surfaces related " half space theorem", of Hoffman and Meeks, and "Bernstein theorem".

Introduction

Dans ce document on considère des surfaces M de classe C^2 dans $\mathbb{R}^3$ orientées par un champ de vecteurs normal unitaire N dont la courbure moyenne $H = H(N)$ et la courbure de Gauss K satisfont une relation de Weingarten de la forme :

$$H = f(H^2 - K). \tag{1}$$

Dans la relation (1) f est une fonction continue sur l'intervalle $[0, \infty[$ et de classe C^1 sur $]0, \infty[$ vérifiant :

$$\forall t \in]0, \infty[, \quad 4t(f'(t))^2 < 1 \quad \text{et} \quad \liminf_{t \to 0}(4t(f'(t))^2) < 1. \tag{2}$$

On dira que f est elliptique si f satisfait l'inégalité différentielle (2). Si une surface M satisfait la relation (1) où f est une fonction elliptique nous dirons que M est une surface de Weingarten spéciale

Received 23 July 1994. In revised form 6 June 1995.
Les auteurs sont reconnaissants au CNPq-BRASIL pour son soutien financier
Le second auteur souhaite remercier la P.U.C. de Rio de Janeiro pour son hospitalité durant la préparation de ce travail

(plus simplement une surface spéciale). H.Hopf [8], S.S.Chern [3] et R.Bryant [2] ont déjà étudié ces surfaces. De plus H.Rosenberg et R.Sa Earp ont donné dans [11] une définition différente de surface spéciale: plus précisément ils requièrent la propriété de "height estimates" pour M afin d'étendre certains résultats de la théorie géométrique des surfaces de courbure moyenne constante non nulle à ces surfaces de Weingarten. Pour ce travail nous n'avons pas besoin de cette hypothèse.

On remarque que la condition f elliptique entraine qu'une surface spéciale M est une surface elliptique, i.e. si on considère M comme un graphe local donné par une fonction u, l'équation différentielle partielle de deuxième ordre sur u induite par (1) est une équation elliptique.

En fait la condition d'ellipticité est précisément l'inéquation :

$$4(H^2 - K)(f'(H^2 - K))^2 < 1,$$

sur M, voir [1] et [11]. Cette condition est équivalente au fait que l'opérateur linéarisé L_f de l'équation (1) est elliptique [11]. Ceci entraine que les surfaces spéciales satisfont le principe du maximum suivant (tout comme les surfaces minimales ($f \equiv 0$) et les surfaces à courbure moyenne constante ($f \equiv c$)), démontré par F.Brito et le premier auteur dans [1]: Considérons deux surfaces M_1 et M_2 tangentes en un point p avec M_1 au-dessus de M_2 dans un voisinage de p (où près de p, M_1 et M_2 sont vues comme un graphe par rapport à leur plan tangent en p). Supposons que M_1 et M_2 vérifient la relation (1) avec f elliptique, c'est à dire que M_1 et M_2 sont des surfaces spéciales pour la même fonction elliptique f et par rapport à la même orientation normale N, nous aurons alors $M_1 = M_2$ dans un voisinage de p. Les surfaces spéciales satisfont également le principe du maximum à bord dont l'énoncé est analogue au précédent.

Si $f(0) = 0$ nous remarquons qu'un plan est une surface spéciale (i.e. satisfait les conditions (1) et (2)). En supposant également $f(0) = 0$ on note immédiatement certaines analogies entre les surfaces spéciales et les surfaces minimales: La courbure de Gauss K est toujours négative, $K \leq 0$, et si de plus f est de classe C^2 sur $[0, +\infty[$, les zéros de K sont isolés. La première affirmation découle directement du principe du maximum en faisant la comparaison de M en un point p tel que $K(p) > 0$ avec le plan tangent de M en p. La deuxième affirmation est une conséquence de la condition (2) et du fait que les points ombiliques d'une surface spéciale sont isolés (voir [2], [3] et [8]) : en effet, si f est elliptique on déduit que $t = 0$ est l'unique solution des équations $t - f(t^2) = 0$ et $t + f(t^2) = 0$ en supposant $f(0) = 0$, ceci entraine que si l'une des courbures principales de M en p est nulle l'autre courbure doit également être nulle. Nous déduisons également de la première affirmation qu'il n'existe pas de surface spéciale M dans $\mathbb{R}^3$ avec $f(0) = 0$ compacte et sans bord. Plus généralement M est contenue dans l'enveloppe convexe de son bord si l'on suppose M compacte.

En tenant compte de ces analogies, nous dirons qu'une surface M vérifiant (1) avec $f(0) = 0$ et f elliptique est une surface spéciale de type minimal. Cette notion a déjà été introduite dans [11]. Si de plus M est une surface de révolution nous dirons que M est une surface spéciale de type caténoïde. Le premier auteur et H.Rosenberg ont remarqué qu'une surface M parallèle à une caténoïde est une surface spéciale de type caténoïde qui satisfait une relation de la forme $aH + K = 0$ voir [11]. Egalement dans [11] les auteurs posent la question si le théorème de Bernstein est vrai pour les surfaces spéciales de type minimal. En fait on peut montrer que l'application de Gauss est quasi-conforme si f vérifie la condition plus stricte :

$$\forall t \in]0, \infty[, \quad 4t(f'(t))^2 \leq \alpha < 1,$$

oú α est une constante réelle positive strictement inférieure à 1. Dans ces conditions L.Lima nous a signalé qu'un résultat de L.Simon [14] entraine le théorème de Bernstein.

Notons que lorsque $f(0) \neq 0$ les sphères de courbure moyenne $f(0)$ sont dans la classe de f (c'est à dire qu'elles vérifient (1)). Pour cette raison nous dirons qu'une surface vérifiant (1) avec $f(0) \neq 0$ est une surface spéciale de type coubure moyenne constante. Ces surfaces ont été étudiées dans [11] où les auteurs appliquent le principe de comparaison avec les sphères pour obtenir des résultats globaux reliant la géométrie et la topologie des surfaces spéciales. Dans un travail qui suivra (voir la note [12]) les auteurs étudient également ces surfaces et montrent l'existence de deux familles de surfaces de révolution, l'une est analogue aux ondoloïdes de Delaunay et l'autre aux nodoïdes de Delaunay [5]. Notons également que sous certaines conditions l'un des auteurs, R.Sa Earp, a donné avec F. Braga Brito, une caractérisation des surfaces spéciales compactes de type courbure moyenne constante ayant pour bord un cercle, voir [1].

Les auteurs considérerons ultérieurement les surfaces spéciales de l'espace hyperbolique $\mathcal{H}^3$.

Nous voudrions remercier F. Braga Brito pour les nombreuses discussions fructueuses qui ont contribués à l'élaboration de ce travail.

Dans ce document nous exposons les résultats suivants : *Au théorème 1 on montre l'existence et l'unicité (à une isométrie de $\mathbb{R}^3$ près) d'une famille à un paramètre réel τ, de surfaces spéciales. Puis nous déterminons le comportement géométrique de ces surfaces lorsque f satisfait certaines conditions. Comme corollaire nous remarquons que le "Half-space theorem" de D.Hoffman et W.Meeks [7] est egalement vrai dans le cadre du théorème 1. Egalement nous montrerons (théorème 2) que sous certaines conditions sur f toute surface spéciale de type caténoïde (pas forcément complète) est nécessairement une partie de l'une des surfaces complètes données par le théorème 1, puis nous donnerons des contre-exemples dans le cas où f ne satisfait pas ces conditions (remarque 3). Plus généralement au théorème 3 nous montrerons sous certaines hypothèses sur f qu'il existe des surfaces spéciales, relativement à f, à bord dont la courbure de Gauss tend vers $-\infty$ lorsque l'on s'approche du bord.*

Existence et géométrie des surfaces spéciales de révolution de type minimal

Dans ce qui suit f désignera toujours une fonction elliptique (voir l'introduction). Nous supposerons de plus que $f(0) = 0$. Nous poserons parfois quelques hypothèses supplémentaires sur f mais les propriétés précédentes seront toujours vérifiées.

Nous voulons maintenant montrer l'existence d'une famille de surfaces spéciales complètes de révolution (i.e. de type caténoïde) pour toute fonction elliptique f vérifiant $f(0) = 0$.

Lemme 1. *Soit $y\ :\ ]a,b[\ \to\ ]0,\infty[$ une fonction strictement positive de classe C^2. Soit M la surface engendrée par la révolution du graphe de y par rapport à l'axe des x. Soit H la courbure moyenne de M calculée par rapport au champ de vecteurs normal N de M pointé en direction opposée à l'axe de révolution, l'axe des x.*

Dans ces conditions M est une surface spéciale (i.e. vérifiant $H = f(H^2 - K)$) si et seulement si y vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{y''}{2(1+y'^2)^{3/2}} - \frac{1}{2y(1+y'^2)^{1/2}} = f\Big(\Big(\frac{y''}{2(1+y'^2)^{3/2}} + \frac{1}{2y(1+y'^2)^{1/2}}\Big)^2\Big). \quad (3)$$

Démonstration: Il est connu que les courbures principales $\lambda_1(p)$ et $\lambda_2(p)$ de M en un point $p \in M$ calculées par rapport au champ normal N sont :

$$\lambda_1(p) = k(p), \quad et \quad \lambda_2(p) = -\frac{\cos(\sigma)}{y},$$

où $k(p)$ est la courbure du graphe de y au point p et σ est l'angle que fait la tangente du graphe de y au point p avec l'axe des x. On conclut en utilisant les définitions de H et K.

Nous pouvons maintenant montrer les résultats suivants :

Théorème 1. *Soit f une fonction elliptique avec $f(0) = 0$.*

1) *Soit $\tau > 0$ un réel vérifiant (voir Remarque 1-a)):*

$$\frac{1}{\tau} < \lim_{t\to+\infty}(t - f(t^2)).$$

Il existe une unique surface complète spéciale de révolution M_τ (i.e. vérifiant $H = f(H^2 - K)$ où H est calculé avec la même convention de signe qu'au lemme 1) dont le courbe génératrice est le graphe d'une fonction y de classe C^3 convexe, strictement positive, ayant un minimum en 0 et symétrique par rapport à l'axe des y, i.e. y vérifie :

$$y > 0, \quad y(0) = \tau, \quad y'(0) = 0, \quad y'' > 0, \quad et \quad y(-x) = y(x).$$

2) *Si de plus f est lipschitzienne en 0 la surface M_τ n'est asymptote à aucun plan vertical, i.e. la coordonnée x sur M_τ est une fonction propre.*

Plus précisément il existe une caténoïde C (dont l'axe de révolution est l'axe des x) telle que au-dehors d'une partie compacte M_τ se trouve à l'intérieur de la composante de $\mathbb{R}^3 - C$ contenant l'axe de révolution.

3) *Supposons enfin que f est positive ($f \geq 0$) et vérifie (voir remarque 1-b)) :*

$$\lim_{t\to+\infty}(t - f(t^2)) = +\infty.$$

Dans ces conditions lorsque τ tend vers 0 le graphe de y_τ converge vers la demi-droite verticale

Démonstration: 1) Nous allons construire une solution locale y de l'équation (3) satisfaisant $y(0) = \tau$, $y'(0) = 0$ et définie sur un intervalle de la forme $]-x_1, x_1[$, $x_1 > 0$. Puis nous montrerons que ce graphe peut se prolonger en une courbe complète, il sera clair au cours de la construction que cette courbe sera un graphe convexe, positif et symétrique par rapport à l'axe des y. Considérons la fonction F définie par

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\gamma}{2(1+\beta^2)^{3/2}} - \frac{1}{2\alpha(1+\beta^2)^{1/2}} - f\left(\left(\frac{\gamma}{2(1+\beta^2)^{3/2}} + \frac{1}{2\alpha(1+\beta^2)^{1/2}}\right)^2\right),$$

où $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

L'équation (3) est équivalente à :

$$F(y, y', y'') = 0. \tag{4}$$

Du fait que f est elliptique nous remarquons que :

$$F(\tau, 0, 0) = \frac{-1}{2\tau} - f\left(\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2\right) < 0.$$

Nous avons par ailleurs :

$$\lim_{\gamma\to+\infty} F(\tau, 0, \gamma) = \lim_{t\to+\infty}(t - f(t^2)) - \frac{1}{\tau} > 0,$$

l'inégalité provient de l'hypothèse sur τ. De plus l'ellipticité de f assure que $F(\tau, 0, \gamma)$ est une fonction strictement croissante de γ. Nous concluons de ceci qu'il existe un unique réel $\tau'' > 0$ vérifiant $F(\tau, 0, \tau'') = 0$. Egalement par l'ellipticité de f nous savons que

$$\frac{\partial F}{\partial \gamma}(\tau, 0, \tau'') > 0,$$

de ce fait le théorème des fonctions implicites assure l'existence d'un voisinage U de $(\tau, 0)$ dans $\mathbb{R}^2$, d'un voisinage V de τ'' dans $\mathbb{R}$ et d'une unique fonction h de classe C^1 de U dans V vérifiant :

$$\forall(\alpha,\beta) \in U,\ \forall\gamma \in V,\quad F(\alpha,\beta,\gamma) = 0 \Leftrightarrow \gamma = h(\alpha,\beta)$$

et

$$h(\tau, 0) = \tau''.$$

Finalement la théorie des équations différentielles assure l'existence et l'unicité d'une fonction y de classe C^3 définie sur un intervalle $]-x_1, x_1[$, $x_1 > 0$, vérifiant l'équation différentielle :

$$y'' = h(y, y') \qquad \text{avec} \qquad y(0) = \tau \;\; et \;\; y'(0) = 0. \tag{5}$$

Par construction cette solution est également solution de l'équation (4) et nous remarquons que la fonction $z(x) = y(-x)$ définie sur $]-x_1, x_1[$ est également solution de (4). Par unicité des solutions nous déduisons que le graphe de y est symétrique par rapport à l'axe des y.

Remarquons que pour $x \in]-x_1, x_1[$ nous avons $y'' > 0$. En effet s'il existait $x_0 \in]-x_1, x_1[$ avec $y''(x_0) = 0$, l'équation (3) donnerait $t + f(t^2) = 0$, avec

$$t = \frac{1}{2y(x_0)(1 + y'^2(x_0))^{1/2}},$$

mais $t = 0$ est la seule solution de l'équation précédente (car f est elliptique). Nous concluons de ceci que $y(x_0) = \infty$ ou que $y'(x_0) = \infty$ ce qui est absurde car y est de classe C^3 sur $]-x_1, x_1[$. Nous déduisons que y et y' sont des fonctions positives et strictement croissantes sur $]0, x_1[$, de la sorte ces fonctions possèdent une limite, peut-être infinie, en x_1. Appelons y_1 et y_1' ces limites :

$$y_1 = \lim_{x \to x_1} y(x), \qquad y_1' = \lim_{x \to x_1} y'(x).$$

Si $y_1 = +\infty$ le graphe de y est complet ce qui terminerait notre preuve (en fait nous montrerons plus loin que si f est lipschitzienne en 0 ce cas ne peut pas se produire).

Supposons donc que $y_1 < +\infty$. Nous avons $y_1' < +\infty$ car sinon la surface spéciale engendrée par la révolution du graphe de y autour de l'axe des x serait tangente et d'un coté du plan vertical $\{x = x_1\}$, ce qui contredirait le principe du maximum à bord. Nous avons donc $0 < y_1 < +\infty$ et $0 < y_1^{'} < +\infty$.

Comme précédemment, en utilisant le fait que $F(y_1, y_1^{'}, \gamma)$ est une fonction strictement croissante de γ, nous concluons qu'il existe un unique $y_1^{''} > 0$ vérifiant $F(y_1, y_1^{'}, y_1^{''}) = 0$. Finalement comme

$$\frac{\partial F}{\partial \gamma}(y_1, y_1^{'}, y_1^{''}) > 0 \quad (\text{car } f \text{ est elliptique})$$

nous pouvons utiliser le théorème des fonctions implicites, comme dans la première partie de la preuve, pour prolonger y en une solution de (3) au-delà de x_1.

Il est maintenant clair que si le graphe de y n'est asymptote à aucune droite verticale y peut être prolongée en une solution de (3) définie sur $\mathbb{R}$ entier. De plus le graphe de y est symétrique par rapport à l'axe des y et est une courbe convexe. L'unicité d'une telle fonction vérifiant $y(0) = \tau$ et $y^{'}(0) = 0$ découle immédiatement du théorème fondamentale d'existence et d'unicité de solution des équations différentielles.

2) Supposons maintenant que f est lipschitzienne en 0. Considérons y une fonction dont le graphe engendre l'une des surfaces spéciales de révolution données par la première partie du théorème 1. La fonction y est définie sur un intervalle de la forme $]-x_1, x_1[$, $0 < x_1 \leq +\infty$ et nous avons :

$$\lim_{x \to x_1} y(x) = +\infty.$$

Nous voulons montrer que $x_1 = +\infty$. Soient $\lambda_1(x)$ et $\lambda_2(x)$ les deux courbures principales de M, comme M est une surface spéciale nous avons :

$$\forall x \in]-x_1, \quad x_1[, \quad \frac{1}{2}(\lambda_1(x) + \lambda_2(x)) - f((\frac{\lambda_1(x) - \lambda_2(x)}{2})^2) = 0.$$

Il est clair que la courbure $\lambda_2(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers x_1 (voir le lemme 1) et en utilisant le fait que f est elliptique on peut montrer que $\lambda_1(x)$ doit également tendre vers 0, de ce fait

$$\lim_{x \to x_1} \lambda_1(x) = \lim_{x \to x_1} \lambda_2(x) = 0.$$

Par hypothèse il existe un réel positif $C > 0$ tel que si t est proche de 0 nous avons :

$$f(t) \leq Ct.$$

Nous déduisons que pour x proche de x_1 nous avons :

$$\lambda_1 + \lambda_2 \leq 2C(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2})^2 \leq \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}$$

ce qui nous donne $\lambda_1 \leq -3\lambda_2$. En reportant dans la première inégalité nous obtenons $\lambda_1 \leq -\lambda_2 + A\lambda_2^2$, où $A = 8C$. Ce qui précède montre donc qu'il existe une constante x_0, $x_0 < x_1$ vérifiant :

$$\forall x \in]x_0, x_1[, \quad \frac{y^{''}}{(1+y^{'2})^{3/2}} \leq \frac{1}{y(1+y^{'2})^{1/2}} + \frac{A}{y^2(1+y^{'2})}.$$

En utilisant le fait que $y^{'}$ est positive nous pouvons montrer qu'il existe deux réels positifs, $a,\ b > 0$, tels que

$$\forall x \in]x_0, x_1[, \quad y(x) < ae^{bx},$$

L'inégalité précédente montre déjà que, pour x proche de x_1, le graphe de y se trouve au-dessous du graphe d'une exponentielle et donc ne peut pas être asymptote à une droite verticale $\{x = x_1\}$. Nous concluons donc que $x_1 = +\infty$ et y est définie sur $\mathbb{R}$ entier. Egalement si d est un réel supérieur à b, $d > b$, pour x assez grand nous aurons

$$ce^{bx} < \frac{1}{d}\mathrm{ch}(dx),$$

où ch(.) désigne le cosinus hyperbolique. Nous concluons la preuve de la partie 2 du théorème en remarquant que la révolution du graphe de la fonction $\frac{1}{d}\mathrm{ch}(dx)$, qui est une chaînette, par rapport à l'axe des x est une caténoïde.

3) Supposons enfin que f est positive $f \geq 0$, et vérifie

$$\lim_{t \to +\infty} (t - f(t^2)) = +\infty.$$

Considérons pour chaque $\tau > 0$ la fonction $y_\tau(x)$ vérifiant $y_\tau(0) = \tau$, $y_\tau^{'}(0) = 0$ et telle que la révolution du graphe par rapport à l'axe des x donne la surface spéciale M_τ. Soit $c_\tau(x)$ la fonction :

$$c_\tau(x) = \tau \mathrm{ch}(\frac{x}{\tau}),$$

où ch(.) est le cosinus hyperbolique. Nous savons que la révolution du graphe de c_τ (la chaînette) par rapport à l'axe des x donne une caténoïde C_τ, nous appellerons également c_τ le graphe de la fonction c_τ.

Nous allons montrer que la chaînette c_τ se trouve toujours au-dessous du graphe de y_τ, c'est à dire :

$$c_\tau(x) \leq y_\tau(x), \tag{7}$$

pour tout x réel où y_τ est définie. Ceci montrera que le graphe de y_τ converge vers l'axe des y lorsque τ tend vers 0 car nous avons $\lim_{\tau\to 0} c_\tau(x) = +\infty$ pour tout x différent de 0.

Pour cela rappelons le principe du maximum usuel dans la forme énoncée par R.Schoen dans [13]:

Soient M_1 et M_2 deux surfaces de classe C^2 de $\mathbb{R}^3$. Soient N_1 et N_2 des champs normaux unitaires sur M_1 et M_2 respectivement. Supposons que M_1 et M_2 sont tangentes en un point p et que $N_1(p) = N_2(p)$. Soient H_1 et H_2 les courbures moyennes de M_1 et M_2 calculées par rapport à N_1 et N_2 respectivement. Supposons enfin que $H_1 \geq 0$ et $H_2 = 0$ dans un voisinage de p. Dans ces conditions il n'est pas vrai que $M_1 \leq M_2$ (par rapport à l'orientation induite par les champs N_1 et N_2) près de p, à moins que $M_1 = M_2$ près de p.

Montrons donc l'inégalité (7). Appelons Γ_τ le graphe de y_τ. Remarquons que Γ_τ et la chaînette c_τ sont tangents au point $P = (0, \tau)$. En comparant les courbures moyennes des surfaces de révolution engendrées (calculées par rapport à l'orientation normale opposée à l'axe de révolution), le principe du maximum énoncé ci-dessus montre que dans un voisinage de P le graphe Γ_τ ne peut pas se trouver au-dessous de c_τ. En effet, du fait que f est positive la courbure moyenne de M_τ est positive. De plus près de P les deux courbes ne peuvent pas avoir une infinité d'intersections. En effet sinon en déplaçant Γ_τ à l'aide des translations horizontales, nous obtiendrions un arc de Γ_τ tangent en un point à c_τ et se trouvant au-dessous de c_τ près de ce point, ce qui comme précédemment contredit le principe du maximum usuel. De ce fait dans un voisinage de P la seule intersection de Γ_τ avec c_τ est le point P et la courbe Γ_τ se trouve au-dessus de c_τ. Enfin le même argument que nous venons d'utiliser montre que les courbes Γ_τ et c_τ n'ont pas d'autres points en commun que P. Nous concluons donc que Γ_τ se trouve toujours au-dessus de c_τ.

Remarque 1

a) La condition ($\frac{1}{\tau} < \lim_{t\to+\infty}(t - f(t^2))$) imposée à τ au théorème 1 est en fait nécessaire. En effet supposons qu'il existe une fonction y de classe C^2 définie sur un intervalle contenant 0 telle que la révolution du graphe autour de l'axe des x donne une surface spéciale et vérifiant :

$$y(0) = \tau \quad et \quad y'(0) = 0.$$

En particulier pour $x = 0$, y vérifie l'équation suivante (voir lemme 1) :

$$\frac{y''(0)}{2} - \frac{1}{2\tau} - f((\frac{y''(0)}{2} + \frac{1}{2\tau})^2) = 0,$$

c'est à dire

$$\frac{1}{\tau} = t - f(t^2),$$

en posant

$$t = \frac{y''(0)}{2} + \frac{1}{2\tau}.$$

Comme la fonction $t - f(t^2)$ est strictement croissante (car f est elliptique) nous concluons que nous avons nécessairement :

$$\frac{1}{\tau} < \lim_{t\to+\infty}(t - f(t^2)).$$

b)La preuve de la partie 2 du théorème 1 utilise le fait que f est lipschitzienne en 0, cette hypothèse est essentielle. Considérons en effet les fonctions :

$$f_a(t) = a\sqrt{t}, \quad t \geq 0, \ a \in]0,1[,$$

elles sont toutes elliptiques avec $f(0) = 0$ mais ne sont pas lipschitziennes en 0. On montre facilement que les surfaces spéciales (relativement à f_a) données par le théorème 1 sont comprises entre deux plans verticaux de $\mathbb{R}^3$ parallèles au plan $\{x = 0\}$. Par contre les surfaces spéciales correspondant à $-f_a$ ne sont pas comprises entre deux plans.

Corollaire 1.1. (**"Half-space theorem" pour les surfaces spéciales de type minimal.**) *Soit f une fonction elliptique positive ($f \geq 0$), lipschitzienne en 0 vérifiant :*

$$f(0) = 0, \quad et \quad \lim_{t \to +\infty} (t - f(t^2)) = +\infty.$$

Soit M une surface spéciale (i.e. satisfaisant $H = f(H^2 - K)$ où H est calculé par rapport à une orientation normale quelconque de M) complète connexe proprement immergée contenue dans un demi-espace de $\mathbb{R}^3$. Dans ces conditions M est un plan.

Démonstration: La preuve est analogue au cas minimal, voir [7] ou [10], nous remplaçons les caténoïdes par la famille de surfaces spéciales M_τ données par le théorème 1.

Remarque 2

On peut également montrer la version suivante du "Strong half-space theorem" de D.Hoffman et W.Meeks [7] (qui provient lui-même d'un résultat de W.Meeks, L.Simon et S.Yau [9]).

Soient M_1 et M_2 des surfaces spéciales de type minimal proprement plongées dans $\mathbb{R}^3$ et disjointes, où l'on suppose que la fonction f satisfait les mêmes hypothèses qu'au corollaire 1.1. Appelons Ω la composante connexe de $\mathbb{R}^3 - (M_1 \cup M_2)$ bordée par M_1 et M_2. Dans ces conditions, si les vecteurs courbure moyenne de M_1 et M_2 sont pointés vers Ω les surfaces M_1 et M_2 sont forcément des plans parallèles.

Pour montrer ceci nous remarquons d'abord que $M_1 \cup M_2$ est une bonne barrière pour résoudre le problème de Plateau dans Ω, puis comme dans [7] à l'aide de cette barrière nous construisons une surface minimale stable et complète dans Ω. Par ailleurs un résultat de M.Do Carmo et Peng [4] aussi bien que de D.Fisher-Colbrie et R.Schoen [6] atteste que la seule surface minimale stable et complète dans $\mathbb{R}^3$ est le plan. Il suffit ensuite d'appliquer le "Half-space theorem" (corollaire 1.1).

Théorème 2. (**Classification des surfaces spéciales de révolution de type minimal.**) a) *Pour toute fonction elliptique f, toute surface spéciale complète de révolution de type minimal est forcément l'une des* *surfaces M_τ données par le théorème 1.*

b) *Supposons de plus que f est positive, $f \geq 0$ et que $\lim_{t\to+\infty}(t - f(t^2)) = +\infty$. Toute surface spéciale de révolution de type minimal S non planaire est forcément une partie de l'une des surfaces complètes M_τ données par le théorème 1.*

Autrement dit supposons que γ est une courbe plane de classe C^2 telle que la révolution de γ par rapport à l'axe des x donne une surface spéciale S. Si la surface S est complète S est forcément l'une des surfaces de révolution données par le théorème 1, et si S n'est pas complète la courbe γ est le graphe d'une fonction y qui peut être prolongée sur un intervalle réel plus grand telle que son graphe devienne une courbe complète engendrant l'une des surfaces complètes de révolution données par le théorème 1.

Démonstration: Nous commencerons par montrer l'assertion b). Remarquons que toute courbe plane γ, qui n'est pas une partie d'une droite verticale, possède une portion de courbe qui est un graphe par rapport à l'axe des x. De plus à une symétrie près et quitte à considérer une partie de ce graphe, on peut supposer que ce graphe est strictement positif. De cette manière, quitte à considérer une partie de γ, il n'y a pas de restriction à supposer que γ est le graphe d'une fonction y de x strictement positive de classe C^2, définie sur un intervalle $]a, b[$ de $\mathbb{R}$ et satisfaisant l'équation (3).

Tout d'abord, si la courbe γ possède un minimum la démonstration du théorème 1 montre que y peut être prolongée de manière unique en une solution complète. Supposons maintenant que cette situation ne se produit pas, la fonction y' a donc un signe constant sur $]a, b[$ et sans restriction on peut supposer $y'(x) > 0$ sur $]a, b[$, l'autre cas se traiterait de la même manière.

Remarquons également que du fait que la courbure de Gauss de S est négative (voir l'introduction) la courbure de γ calculée par rapport au champ de vecteur normal dirigé dans le sens des y croissants doit être positive et nous avons donc $y'' \geq 0$ sur $]a, b[$ ainsi y et y' sont des fonctions croissantes et positives sur $]a, b[$. En fait la démonstration du théorème 1 montre que $y^{''} > 0$ et que y se prolonge au-delà de b en une solution de (3) sur un intervalle $]a, x_1[$ avec $b \leq x_1 \leq +\infty$, telle que $\lim_{x \to x_1} y = +\infty$. Il reste donc à prolonger y au-delà de a, mais en utilisant le fait que y et $y^{'}$ sont positives et que $\lim_{t \to +\infty}(t - f(t^2)) = +\infty$, la démonstration du théorème 1 montre que y peut être prolongée au-delà de a. Si au cours de ce processus on obtient un point x_0 avec $y^{'}(x_0) = 0$ on déduit que y est symétrique par rapport à x_0 et le graphe de y sera donc une courbe complète ce qui complèterait la preuve. Si un tel x_0 n'existe pas seulement deux situations peuvent se produire à la fin de ce processus de prolongement :

cas (1) : y est prolongée jusqu'à $-\infty$ et nous avons $\lim_{x \to -\infty} y(x) = c \geq 0$.

cas (2) : y est prolongée jusqu'à un point $x_0 \leq a$ et nous avons $\lim_{x \to x_0} y(x) = 0$.

Montrons qu'aucun de ces deux cas ne peuvent se produire.

Dans le premier cas la courbure du graphe de y, qui est l'une des courbures principales de la surface de révolution S engendrée par le graphe, possède nécessairement 0 comme valeur d'adhérence lorsque x tend vers $-\infty$ car le graphe de y est asymptote à une droite. En conséquence, en utilisant le fait que f est une fonction elliptique, on peut montrer que l'autre courbure principale de S, qui est

$$\frac{1}{y(1 + y'^2)^{1/2}},$$

a également 0 comme valeur d'adhérence, ce qui est absurde car dans ce contexte y et $y^{'}$ sont des fonctions positives croissantes et sont de ce fait bornées près de $-\infty$.

Pour traiter le deuxième cas, à une translation horizontale près, on peut supposer que x_0 est négatif, $x_0 < 0$, et que 0 est dans le domaine de définition de y. Puis on considère la famille des chaînettes centrées sur la droite verticale $\{x = 0\}$, c'est à dire les graphes des fonctions $c_\tau(x) = \tau \mathrm{ch}(\frac{x}{\tau})$. Rappelons que la révolution du graphe de c_τ, que nous continuerons d'appeler c_τ est une caténoïde. Soit x_2, $0 < x_2$, dans le domaine de définition de y telle que $-x_2$ figure aussi dans le domaine de y. Nous avons $\lim_{\tau \to 0} c_\tau(x_2) = +\infty$, il existe donc un réel $\tau > 0$ tel que :

$$y(0) > \tau = c_\tau(0), \quad et \quad y(x_2) < c_\tau(x_2).$$

Appelons L l'arc de c_τ bordé par le point $A = (x_2, c_\tau(x_2))$ et son symétrique B
par rapport à l'axe des y, c'est à dire $B = (-x_2, c_\tau(x_2))$. En considérant la famille des translatées horizontales de L, correspondant aux vecteurs $(t, 0)$, $t < 0$, nous aurons un dernier point de contact p entre une translatée $L^{'}$ de L et le graphe de y. Près de ce point p l'arc $L^{'}$ sera au-dessus du graphe de y, en conséquence la caténoïde $C^{'}$ engendrée par $L^{'}$ sera au-dessus de S. Cette situation contredit le principe du maximum usuel (voir la preuve de la partie (3) du théorème 1) car comme f est positive, le vecteur courbure moyenne de S est dirigé vers l'extérieur de $C^{'}$, i.e. vers la composante de $\mathbb{R}^3 - C^{'}$ qui ne contient pas l'axe de révolution.

Pour montrer l'assertion a) considérons une surface spéciale M de type minimal complète de révolution et appelons γ la courbe qui l'engendre. Remarquons que comme la courbure de Gauss de M est négative (voir l'introduction) γ est forcément une courbe complète qui est le graphe d'une fonction convexe positive y définie sur $\mathbb{R}$ ou une partie de $\mathbb{R}$. De plus au cours de la démonstration de l'assertion b) nous avons montré (voir la discussion du cas (1)) que, en supposant seulement f elliptique, γ ne pouvait pas être asymptote à une droite horizontale. Nous déduisons de ceci que y possède un minimum et, à une translation près, nous pouvons supposer que ce minimum est au point $x = 0$ avec $y(0) = \tau, \tau > 0$ et donc $y^{'}(0) = 0$. Nous concluons en remarquant que le théorème 1 montre qu'il n'existe qu'une surface spéciale complète de révolution passant par le point $(0, \tau)$ avec une tangente horizontale.

Remarque 3

a) L'hypothèse $\lim_{t \to +\infty}(t - f(t^2)) = +\infty$ de l'assertion b) du théorème 2 est nécessaire. Considérons en effet la caténoïde C engendrée par la chaînette $c(x) = \mathrm{ch}(x)$. Il est facile de montrer que les surfaces parallèles extérieures de C, c'est à dire les surfaces obtenues en déplaçant chaque point p d'une distance constante suffisamment petite $a > 0$ selon la direction normale extérieure, vérifient :

$$H + aK = 0,$$

ou bien $H = f(H^2 - K)$, avec

$$f(t) = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4a^2 t}}{2a}.$$

Nous concluons que f est elliptique et vérifie $f(t) \geq 0$ pour $t \geq 0$ et

$$\lim_{t \to +\infty} (t - f(t^2)) \neq +\infty.$$

De plus la courbure de Gauss K_a de la nouvelle surface est :

$$K_a(p) = \frac{K(p)}{1 + K(p)a^2},$$

où K est la courbure de Gauss de C. Par ailleurs la courbure de Gauss de C vérifie $-1 \leq K(p) < 0$, où $K(p) = -1$ seulement au minimum de la chaînette (pour $x = 0$). En considérant la demi caténoïde $C^+ = C \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x \geq 0\}$ nous concluons que la déformation parallèle de C^+ de distance 1 par rapport à la direction normale extérieure donnera une surface spéciale M à bord avec un bout de type caténoïde. De plus la courbure de Gauss de M tend vers $-\infty$ lorsque l'on s'approche du bord, on ne peut donc pas prolonger M en une surface complète de classe C^2.

b) L'hypothèse f positive de l'assertion b) du théorème 2 est également nécessaire. En effet la déformation parallèle de distance 1 suivant la direction normale intérieure de la caténoïde C de la remarque a) précédente donne un exemple où le cas (2) plus haut se produit.

Le résultat suivant généralise la remarque 3.

Théorème 3. *Soit f une fonction elliptique satisfaisant :*

$$f(0) = 0, \qquad et \qquad \lim_{t \to +\infty} (t - f(t^2)) \neq +\infty.$$

Il existe des surfaces spéciales à bord M, de classe C^2 sur $M - \partial M$ et de classe C^1 jusqu'au bord, telles que la courbure de Gauss de M tende vers $-\infty$ lorsque l'on s'approche du bord. Ces surfaces ne peuvent donc pas se prolonger au-delà du bord pour obtenir des surfaces complètes de classe C^2.

Démonstration: Soient $y_0 > 0$ et $y_0' < 0$ deux réels vérifiant :

$$\frac{1}{y_0} > \lim_{t\to+\infty}(t - f(t^2))$$

et

$$\frac{1}{y_0(1+y_0'^2)^{1/2}} < \lim_{t\to+\infty}(t - f(t^2)).$$

L'inégalité de droite et l'ellipticité de f entrainent qu'il existe un unique réel $y_0'' > 0$ vérifiant $F(y_0, y_0', y_0'') = 0$. Ensuite comme au théorème 1 on peut montrer que l'équation différentielle suivante :

$$F(y, y', y'') = 0, \quad \text{avec} \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_0',$$

possède une solution unique définie sur un intervalle de la forme $]-x_1, x_1[$, $x_1 > 0$. Egalement comme au théorème 1 on peut montrer que y peut être indéfiniment étendue au-delà de $-x_1$. Remarquons maintenant que le graphe de y n'a pas de point avec une tangente horizontale pour $x > 0$, sinon en considérant le premier tel point x_2 nous aurions $y'(x_2) = 0$ et ainsi $F(y(x_2), 0, y''(x_2)) = 0$. Nous obtiendrions donc :

$$\lim_{\gamma\to+\infty} F(y(x_2), 0, \gamma) > 0$$

et ainsi nous aurions

$$\frac{1}{y(x_2)} < \lim_{t\to+\infty}(t - f(t^2)),$$

ce qui est absurde car comme y' est négatif y est strictement décroissant et donc $\frac{1}{y(x_2)} > \frac{1}{y_0}$.

De plus comme les fonctions y et y' sont strictement décroissantes elles admettent une limite en x_1 que nous appellerons respectivement y_1 et y_1'. Montrons que l'on ne peut pas avoir $y_1 = 0$. En supposant le contraire nous aurons donc:

$$\lim_{x\to x_1} \lambda_2(x) = -\infty,$$

où

$$\lambda_2(x) = -\frac{1}{y(1+y'^2)^{1/2}}$$

est la courbure principale de la surface de révolution M engendrée par le graphe de y correspondant à la direction orthogonale au graphe de y. En utilisant le fait que M est une surface spéciale nous avons :

$$-\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{2} - \frac{\lambda_2}{2} - f((\frac{\lambda_1}{2} - \frac{\lambda_2}{2})^2),$$

et comme de plus $\lim_{x \to x_1}(\lambda_1 - \lambda_2) = +\infty$, car $\lambda_1 \geq 0$, nous déduisons :

$$-\lim_{x \to x_1}(\lambda_2(x)) = \lim_{t \to +\infty}(t - f(t^2)),$$

ce qui est absurde car la limite figurant à droite de la dernière égalité est par hypothèse finie. Nous concluons donc que nous avons nécessairement $y_1 \neq 0$. Notons que les mêmes arguments montrent que y ne peut pas être étendue sur $[0, +\infty[$ avec $\lim_{x \to +\infty} y(x) = c, \;\; c \geq 0$. Enfin comme au théorème 1 on peut montrer que si $\lim_{x \to x_1} y^{''} \neq +\infty$, on peut étendre y au-delà de x_1.

Nous concluons de ce qui précède que y ne peut pas être indéfiniment étendue au-delà de x_1 et ainsi nous ne pouvons étendre y que jusqu'à un point $x_3, \;\; 0 < x_3 < +\infty$, pour lequel nous aurons :

$$\lim_{x \to x_3} y^{''}(x) = +\infty.$$

Comme par ailleurs $y^{'}$ est une fonction croissante (car $y^{''}$ est positive) et négative sur $]0, x_3[$, nous concluons que la courbure λ_1 du graphe de y tend vers $+\infty$ et ainsi la courbure de Gauss de M tend vers $-\infty$ lorsque l'on s'approche du bord de M (c'est à dire lorsque x tend vers x_3). On ne peut donc pas prolonger M en une surface complète de classe C^2.

Les résultats précédents montrent une grande analogie entre les surfaces minimales et les surfaces spéciales de type minimal. Cependant l'exemple suivant montre qu'il existe des surfaces spéciales lisses complètes de type minimal qui contiennent des morceaux de surfaces minimales et des morceaux de surfaces de courbure moyenne constante non nulle (plus précisément des morceaux de caténoïde et de surface de Delaunay).

Exemple 1

La condition f elliptique est équivalente à :

$$\forall t > 0, \quad | f^{'}(t) | < \frac{1}{2\sqrt{t}}.$$

Considérons deux réels positifs t_1 et t_2, $0 < t_1 < t_2 < +\infty$, et considérons une fonction h de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, paire et vérifiant :

$$\begin{aligned} &\forall t \in [0, t_1], \quad h(t) = 0, \\ &\forall t \in]t_1, t_2[, \quad 0 < h(t) < \frac{1}{2\sqrt{t}}, \\ &\forall t \in [t_2, +\infty[, \quad h(t) = 0. \end{aligned}$$

Clairement une telle fonction existe. Appelons f la primitive de h vérifiant $f(0) = 0$. Par construction f est une fonction positive elliptique et vérifie :

$$\forall t \in [0, t_1], \quad f(t) = 0, \quad et \quad \forall t \in [t_2, +\infty[, \quad f(t) = c > 0,$$

où

$$c = \int_{t_1}^{t_2} h(t)dt,$$

et ainsi $\lim_{t \to +\infty}(t - f(t^2)) = +\infty$.

Nous concluons à l'aide du théorème 1 que pour tout $\tau > 0$ il existe une surface spéciale complète de révolution M_τ dont la courbe génératrice est le graphe d'une fonction y_τ de classe C^∞ définie sur $\mathbb{R}$ (car f est de classe C^∞ en 0, voir la partie 2 du théorème 1) et vérifiant:

$$y(0) = \tau, \quad y^{'}(0) = 0, \quad y^{''}(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nous concluons que si τ est proche de 0 la surface M_τ vérifie dans un voisinage du point $(0, \tau)$ l'égalité $H = c$, et M_τ contient donc un morceau d'une surface de Delaunay (engendrée par une nodoïde). De même si t est assez grand f est constante et égale à 0. En conséquence hors d'une partie compacte la surface M_τ vérifie $H = 0$, et M_τ contient un morceau de caténoïde.

Bibliographie

[1] F.Brito et R.Sa Earp. On the structure of certain Weingarten surfaces with boundary a circle. A paraître aux *Annales de la Fac. Sci. de Toulouse.*

[2] R.Bryant. Complex analysis and a class of Weingarten surfaces. Preprint.

[3] S.S.Chern. On special W.surface. *Trans. A.M.S.* 783-786, (1955)

[4] M.Do Carmo et C.K.Peng. Stable minimal surface in $\mathbb{R}^3$ are planes. *Bulletin of the A.M.S.,* **1**, 903-906, (1979).

[5] C.Delaunay. Sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante. *J. Math. Pures et appl. Sér.1*, **6**, 309-320, (1841).

[6] D.Fischer-Colbrie et R.Schoen. The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of non-negative scalar curvature. *Comm. Pure Appl. Math*, **33**, 199-211, (1980).

[7] D.Hoffman et W.Meeks. The strong halfspace theorem for minimal surfaces. *Inventiones Math.*, **101**, 373-377, (1990).

[8] H.Hopf. Differential geometry in the large. *Lecture Notes in Math.*, Springer-Verlag **1000**, (1983).

[9] W.Meeks, L.Simon et S.Yau. The existence of embedded minimal surfaces, exotic spheres and positive Ricci curvature. *Ann. Math.* **116**, 221-259, (1982).

[10] H.Rosenberg. Some recent developments in the theory of properly embedded minimal surfaces in $\mathbb{R}^3$. *Séminaire Bourbaki* $44^{ième}$ année, N^o759, 1991-1992.

[11] H.Rosenberg et R.Sa Earp. The geometry of properly embedded special surfaces in $\mathbb{R}^3$; e.g. surfaces satisfying $aH + bK = 1$, where a and b are positive. *Duke Math. Journal*, **Vol.73** N^o2, 291-306, (1994).

[12] R.Sa Earp et E.Toubiana. A note on special surfaces in R^3. *Matemática Contemporânea* **Vol. 4**, 108-118, (1993).

[13] R.Schoen. Uniqueness, symmetry, and embeddedness of minimal surfaces. *Journal of Differential Geometry,* **18**, 791-809, (1983).

[14] L.Simon. A Holder estimate for quasiconformal maps between surfaces in euclidean space. *Acta Math.* 19-51, (1977).

Ricardo Sa Earp
Departamento de Matemática
Pontifícia Universidade Católica
Rua Marquês de São Vicente, 225
22453-900, Rio de Janeiro, Bresil

Eric Toubiana
Département de Mathématiques
Université Paris VII
2, Place Jussieu
75251 PARIS - Cedex 05, France